

Correction Devoir Surveillé n°1

Exercice 1

1. On calcule

$$\begin{aligned}
 A &= 27^{n+1} + 3^{n+2} \times 9^n \\
 A &= (3^3)^{n+1} + 3^{n+2} \times (3^2)^n \\
 A &= 3^{3n+3} + 3^{n+2} \times 3^{2n} \\
 A &= 3^{3n+3} + 3^{3n+2} \\
 A &= 3^{3n+2}(3+1)
 \end{aligned}$$

$$A = 4 \times 3^{3n+2}$$

2. On calcule

$$\begin{aligned}
 B &= \ln(\sqrt{5}+2) + \ln(\sqrt{5}-2) \\
 B &= \ln((\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)) \\
 B &= \ln(5-4) \\
 B &= \ln(1)
 \end{aligned}$$

$$B = 0$$

3. On calcule

$$\begin{aligned}
 C &= \ln\left(\sqrt{\ln(e^{4x^2})}\right) \\
 C &= \ln\left(\sqrt{4x^2}\right)
 \end{aligned}$$

$$C = \ln(2|x|)$$

4. On calcule

$$\begin{aligned}
 D &= \frac{\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\frac{2n+2}{n^2(n-1)^2}} \\
 D &= \frac{6(n+1)n^2(n-1)^2}{n(n-1)(2n-2)(2n+2)} \\
 D &= \frac{6(n+1)n(n-1)}{2(n-1) \times 2(n+1)}
 \end{aligned}$$

$$D = \frac{3}{2}n$$

Exercice 21. On résout l'équation pour $x > 3$

$$\begin{aligned}
 \ln(x-3) + \ln(x+1) = 3 \ln 2 &\iff \ln((x-3)(x+1)) = \ln(8) \\
 &\iff (x-3)(x+1) = 8 \\
 &\iff x^2 - 3x + x - 3 = 8 \\
 &\iff x^2 - 2x - 11 = 0
 \end{aligned}$$

On calcule le discriminant $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-11) = 48$. Les solutions de l'équation sont donc

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{48}}{2}$$

$$x_1 = \frac{2 - 4\sqrt{3}}{2}$$

$$x_1 = 1 - 2\sqrt{3}$$

$$x_2 = \frac{2 + \sqrt{48}}{2}$$

$$x_2 = \frac{2 + 4\sqrt{3}}{2}$$

$$x_2 = 1 + 2\sqrt{3}$$

Or, on a

$1 - 2\sqrt{3} < 3$ et $1 + 2\sqrt{3} > 3$ donc

$$\text{L'ensemble des solutions de l'équation est } \mathcal{S} = \{1 + 2\sqrt{3}\}.$$

2. On résout l'équation $|3x+1| + |2x-4| = 5$. On commence par déterminer les cas possibles à l'aide d'un tableau de signe.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	2	$+\infty$
Signe de $3x + 1$	$-$	0	$+$	$+$
Signe de $2x - 4$	$-$		0	$+$

Premier cas : On suppose que $x \leq -\frac{1}{3}$. On a alors

$$\begin{aligned}
 |3x + 1| + |2x - 4| = 5 &\iff -(3x + 1) - (2x - 4) = 5 \\
 &\iff -3x - 1 - 2x + 4 = 5 \\
 &\iff -5x = 2 \\
 &\iff x = -\frac{2}{5}
 \end{aligned}$$

Or $-\frac{2}{5} = -0,4 \leq -0,33 \approx -\frac{1}{3}$. Ainsi $-\frac{2}{5}$ est une solution de cette équation

Second cas : On suppose que $-\frac{1}{3} < x \leq 2$. On a alors

$$\begin{aligned}
 |3x + 1| + |2x - 4| = 5 &\iff (3x + 1) - (2x - 4) = 5 \\
 &\iff 3x + 1 - 2x + 4 = 5 \\
 &\iff x = 0
 \end{aligned}$$

Or $0 \in \left[-\frac{1}{3}; 2\right]$. Ainsi 0 est une solution de cette équation

Second cas : On suppose que $x > 2$. On a alors

$$\begin{aligned}
 |3x + 1| + |2x - 4| = 5 &\iff (3x + 1) + (2x - 4) = 5 \\
 &\iff 3x + 1 + 2x - 4 = 5 \\
 &\iff 5x = 8 \\
 &\iff x = \frac{8}{5}
 \end{aligned}$$

Or $\frac{8}{5}$ n'appartient pas au domaine étudié donc ce n'est pas une solution de cette équation. En conclusion

L'ensemble des solutions de l'équation est $\mathcal{S} = \left\{-\frac{2}{5}; 0\right\}$

3. On résout l'inéquation

$$x^2 - 3x \leq 4 \iff x^2 - 3x - 4 \leq 0$$

On cherche les solutions de l'équation $x^2 - 3x - 4 = 0$. Le discriminant est $\Delta = 9 - 4 \times (-4) = 25$. Les solutions sont donc

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{3 - 5}{2} & x_2 &= \frac{3 + 5}{2} \\
 x_1 &= -1 & x_2 &= 4
 \end{aligned}$$

On en déduit le tableau de signe

x	$-\infty$	-1	4	$+\infty$	
Signe de $x^2 - 3x - 4$	$+$	0	$-$	0	$+$

A l'aide du tableau de signe on en déduit que

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $[-1; 4]$.

4. On résout l'inéquation

$$1 + \frac{1}{2}x^2 \geq \ln(x) \iff 1 + \frac{1}{2}x^2 - \ln(x) \geq 0$$

On pose la fonction $f : x \rightarrow 1 + \frac{1}{2}x^2 - \ln(x)$ définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ en tant que sommes de fonctions définies et dérivables sur $]0; +\infty[$. La dérivée de f est donnée par

$$\begin{aligned} f'(x) &= x - \frac{1}{x} \\ &= \frac{x^2 - 1}{x} \end{aligned}$$

Comme $x > 0$, le signe de la dérivée dépend du signe de $x^2 - 1$.

x	0	1	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$
Variation de f			

On a calculé $f(1) = 1 + \frac{1}{2} - \ln(1) = \frac{3}{2}$. La fonction f est donc positive.

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $]0; +\infty[$.

Exercice 3

1. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique. On résout l'équation

$$\begin{aligned} x &= 3x + 2 \iff -2x = 2 \\ &\iff x = -1 \end{aligned}$$

On introduit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n + 1$. Ainsi :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 1 \\ &= 3u_n + 2 + 1 \\ &= 3u_n + 3 \\ &= 3(u_n + 1) \\ &= 3v_n \end{aligned}$$

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison 3 et $v_0 = 2$. Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 2 \times 3^n$.

On en déduit que pour tout n entier, $u_n = 2 \times 3^n - 1$.

2. La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique associée est donnée par

$$x^2 = x - \frac{1}{4} \iff x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$$

Le discriminant associé à cette équation est

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times \frac{1}{4} \times 1 = 0$$

L'unique solution réelle est $x_0 = \frac{1}{2}$. Dans ce cas, il existe α et β deux réels tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = (\alpha + \beta n) \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

En utilisant $v_0 = 1$ et $v_0 = \alpha$ puis $v_1 = 3$ et $v_1 = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, on en déduit le système

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 1 \\ 1 + \beta = 6 \end{cases} \\ \iff \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 5 \end{cases}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = (1 + 5n) \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

3. D'après l'énoncé, on a

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = 2a_{n+1} + b_{n+1} &\iff a_{n+2} = 2a_{n+1} + 2a_n + 3b_n \\ &\iff a_{n+2} = 2a_{n+1} + 2a_n + 3(a_{n+1} - 2a_n) \\ &\iff a_{n+2} = 5a_{n+1} - 4a_n \end{aligned}$$

Donc la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien une suite récurrente linéaire d'ordre 2. On pose l'équation caractéristique associée :

$$x^2 = 5x - 4 \iff x^2 - 5x + 4 = 0$$

Le discriminant associé à cette équation est

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 4 \times 1 = 9$$

L'équation caractéristique a deux solutions qui sont :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{5-3}{2} & x_2 &= \frac{5+3}{2} \\ x_1 &= 1 & x_2 &= 4 \end{aligned}$$

Dans ce cas, il existe α et β tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \alpha \times 1^n + \beta \times 4^n$$

En utilisant $a_0 = 0$ et $a_1 = 2a_0 + b_0 = 1$, on en déduit le système d'équation

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + 4\beta = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -\beta \\ 3\beta = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{3} \\ \beta = \frac{1}{3} \end{cases}$$

On en déduit que pour tout n entier, $a_n = -\frac{1}{3} + \frac{4^n}{3}$ et $b_n = a_{n+1} - 2a_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times 4^n$.

Exercice 4

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2}{2n+1}$.

— On cherche à montrer les propositions $\mathcal{P}_n : \left\{ u_n = \frac{2}{2n+1} \right\}$.

— **Initialisation** : La propriété \mathcal{P}_0 s'écrit $u_0 = \frac{2}{2 \times 0 + 1}$. Or d'après l'énoncé, $u_0 = 2$. La propriété \mathcal{P}_0 est donc vraie.

— **Hérédité** : On suppose que \mathcal{P}_n est vrai pour un certain rang n . (On a donc $u_n = \frac{2}{2n+1}$)

On utilise la définition de la suite, à savoir $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$. On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n}{1+u_n} \\ &= \frac{\frac{2}{2n+1}}{1+\frac{2}{2n+1}} \\ &= \frac{2}{2n+1} \times \frac{2n+1}{2n+1+2} \\ &= \frac{2}{2(n+1)+1} \end{aligned}$$

La proposition \mathcal{P}_{n+1} est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

— **Conclusion** : $\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2}{2n+1}.$

2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{\sqrt{1+2u_n}}{2}$. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $0 < u_n \leq 1$.

— On cherche à montrer les propositions $\mathcal{P}_n : \{0 < u_n \leq 1\}$.

— **Initialisation** : La propriété \mathcal{P}_1 s'écrit $0 < u_1 \leq 1$. Or d'après l'énoncé, $u_1 = \frac{\sqrt{1+2 \times 0}}{2} = \frac{1}{2}$.

La propriété \mathcal{P}_1 est donc vraie.

— **Hérédité** : On suppose que \mathcal{P}_n est vrai pour un certain rang n . (On a donc $0 < u_n \leq 1$)

On utilise la définition de la suite, à savoir $u_{n+1} = \frac{\sqrt{1+2u_n}}{2}$. On a d'un côté

$$\begin{aligned} 0 < u_n \leq 1 &\implies 1 < 1 + 2u_n \leq 3 \\ &\implies 1 < \sqrt{1+2u_n} \leq \sqrt{3} \\ &\implies \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{1+2u_n}}{2} \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\implies 0 < u_{n+1} \leq 1 \end{aligned}$$

La proposition \mathcal{P}_{n+1} est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

— **Conclusion** : $\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, 0 < u_n \leq 1.$

Exercice 5

1. (a) Le programme demande à l'utilisateur d'entrer un nombre a et calcule $3a^2 + 1$.
- (b) Le programme renverra la valeur 13.
- (c) Non car l'équation $3a^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution.
2. (a) On obtient la température en degré Fahrenheit à l'aide de la formule

$$F = \frac{9}{5}C + 32.$$

- (b) `disp("Ce programme permet de convertir les degrés Celsius ou les degrés Fahrenheit. Pour commencer entrez la température à convertir puis préciser s'il s'agit de degré Celsius (0) ou de degré Fahrenheit (1)")`

```
T = input("Entrez la température à convertir")
type = input("Entrez 0 si la température est en degré Celsius. Entrez 1 si la température est en degré Fahrenheit")

if type == 0 then // Cas ou la température est en degré Celsius
    T_convert = 9/5 * T + 32
    disp("La température est de "+string(T_convert)+' degrés Fahrenheit")
else
    T_convert = 5/9 * (T - 32)
    disp("La température est de "+string(T_convert)+' degrés Celsius")
end
```

3. Le programme pour résoudre les équations du second degré.

```
a = input("Donnez la valeur de a: ")
b = input("Donnez la valeur de b: ")
c = input("Donnez la valeur de c: ")

Delta = b^2 - 4 * a * c

if Delta > 0 then
    x1 = (-b - sqrt(Delta))/(2*a)
    x2 = (-b + sqrt(Delta))/(2*a)
    disp("L'équation a deux solutions " +string(x1)+ " et " + string(x2))
elseif Delta == 0 then
    x0 = -b / (2*a)
    disp("L'équation a une solution " +string(x0)+)
else
    disp("L'équation n'a pas de solutions")
end
```

Exercice 6 - ECRICOME ECT 2011

1. (a) Les fonctions $x \rightarrow e^x$ et $x \rightarrow e^{-x}$ sont définies sur \mathbb{R} . Ainsi, la fonction f est définie sur \mathbb{R} . Le domaine de définition est symétrique. Soit $x \in \mathbb{R}$, on calcule

$$\begin{aligned} f(-x) &= e^{-x} - e^{-(-x)} \\ &= e^{-x} - e^x \\ &= -(e^x - e^{-x}) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

La fonction f est impaire. On peut en déduire que

La courbe \mathcal{C}_f est symétrique par rapport à l'origine.

(b) On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - e^{-x} = +\infty$.

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - e^{-x} = -\infty$.

2. (a) La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} en tant que somme de fonctions dérivables. On calcule

$$f'(x) = e^x + e^{-x}$$

- (b) La fonction exponentielle étant toujours positive, la dérivée de f est strictement positive. On en déduit le tableau de variation suivant

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	
Variation de f	$-\infty$	$+\infty$

- (c) On calcule

$$f(0) = e^0 - e^0 = 0$$

D'après le tableau de variation et le résultat précédent,

$$f(x) > 0 \iff x \in]0; +\infty[$$

$$f(x) < 0 \iff x \in]-\infty; 0[$$

- (d) On a $f'(0) = e^0 + e^0 = 2$ et $f(0) = 0$. Ainsi l'équation de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0 est

$$y = 2x.$$

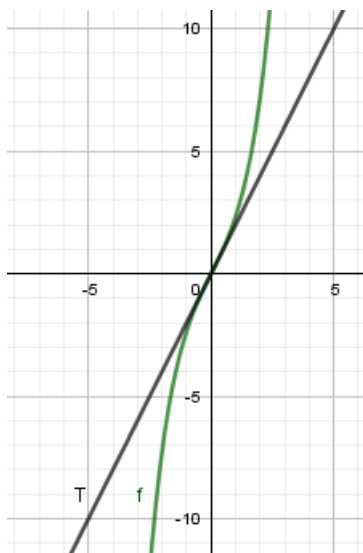
- (e) On calcule la dérivée seconde de f :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = e^x - e^{-x} = f(x).$$

3. (a) On en déduit le signe de f'' :

$$f''(x) > 0 \iff x \in]0; +\infty[\text{ et } f''(x) < 0 \iff x \in]-\infty; 0[$$

(b) On construit la courbe représentative de f et la tangente en 0



4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On veut montrer que l'équation (E_n) admet une unique solution.
- La fonction f est continue sur \mathbb{R} (en tant que somme de fonction continue sur \mathbb{R})
 - La fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R}
 - $f(0) = 0 \leq n$ et $f(\ln(n+1)) = n + 1 - \frac{1}{n+1} > n$.
- D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en conclut que

L'équation $f(x) = n$ a une unique solution.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On calcule le discriminant de l'équation $x^2 - nx - 1 = 0$.

$$\Delta = (-n)^2 - 4 \times (-1) = n^2 + 4 > 0$$

L'équation a donc deux solutions réelles données par

$$x_1 = \frac{n - \sqrt{n^2 + 4}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}$$

On a évidemment x_2 positif (somme de termes positifs). L'étude est moins clair pour x_1 . On a

$$\begin{aligned} n^2 + 4 > n^2 &\implies \sqrt{n^2 + 4} > n \\ &\implies 0 > n - \sqrt{n^2 + 4} \\ &\implies 0 > x_1 \end{aligned}$$

On a x_1 négatif et x_2 positif.

(c) On utilise le changement de variable $t = e^x$. On a alors

$$\begin{aligned} e^x - e^{-x} = n &\iff e^x - \frac{1}{e^x} = n \\ &\implies t - \frac{1}{t} = n \\ &\implies t^2 - 1 = nt \\ &\implies t^2 - nt - 1 = 0 \end{aligned}$$

D'après les résultats de la question précédente, on a $t = x_1$ ou $t = x_2$, c'est à dire, $e^x = x_1$ ou $e^x = x_2$. Or, $e^x = x_1$ est impossible car x_1 est négatif.

L'équation n'a donc qu'une solution : $\mathcal{S} = \left\{ \ln \left(\frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2} \right) \right\}$.

Exercice 7 - Inspiré de EML 1995

1. Soit la fonction f définie par

$$f(x) = x \ln(1+x)$$

(a) La fonction $x \rightarrow x$ est définie sur \mathbb{R} . La fonction $x \rightarrow \ln(1+x)$ est définie pour

$$1+x > 0 \iff x > -1$$

Ainsi, le domaine de définition est $\mathcal{D}_f =]-1; +\infty[$.

(b) Le domaine de définition de la fonction f n'est pas symétrique.

La fonction n'a donc pas de parité

(c) On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty .$$

On a $\lim_{x \rightarrow -1^+} x+1 = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(x+1) = -\infty$. Ainsi $\lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(x+1) = -\infty$. De plus $\lim_{x \rightarrow -1^+} x = -1$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty .$$

(d) La fonction f est dérivable en tant que produit de fonction dérivable sur $] -1; +\infty[$. On calcule

$$f'(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$$

(e) Afin de construire le tableau de variations, on va trouver le signe de la dérivée par disjonction de cas :

1er cas : $x > 0$ Dans ce cas, on a à la fois $1+x > 1$ donc $\ln(1+x) > 0$ et $\frac{x}{1+x} > 0$ donc

$$\forall x > 0, f'(x) > 0.$$

2ème cas : $-1 < x < 0$ Dans ce cas, on a à la fois $1+x < 1$ donc $\ln(1+x) < 0$ et $\frac{x}{1+x} < 0$ donc

$$\forall x > 0, f'(x) < 0.$$

On en déduit le tableau de variations suivant

x	-1	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-	0	+
Variation de f	$+\infty$	0	$+\infty$

2. (a) On résout

$$\begin{aligned}
 f(x) = x &\iff x \ln(1+x) = x \\
 &\iff x \ln(1+x) - x = 0 \\
 &\iff x(\ln(1+x) - 1) = 0 \\
 &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad \ln(1+x) - 1 = 0 \\
 &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad \ln(1+x) = 1 \\
 &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x+1 = e \\
 &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = e-1
 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de $f(x) = x$ est $\mathcal{S} = \{0, e-1\}$.

(b) Par les mêmes calculs que précédemment, on a

$$f(x) \geq x \iff x(\ln(1+x) - 1) \geq 0.$$

Or, $(\ln(1+x) - 1) \geq 0 \iff x \geq e - 1$. D'après le tableau de signe

x	-1	0	$e - 1$	$+\infty$
Signe de x	-	0	+	+
Signe de $\ln(1+x) - 1$	-	0	-	+
Signe de $f(x) - x$	+	0	-	+

L'ensemble des solutions de $f(x) \geq x$ est $\mathcal{S} =]-1; 0] \cup [e - 1; +\infty[$.

3. On montre par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0; e - 1[$:

(a) — On cherche à montrer les propositions $\mathcal{P}_n : \{u_n \in]0; e - 1[\}$.

— **Initialisation** : La propriété \mathcal{P}_0 s'écrit $u_0 \in]0; e - 1[$. La propriété \mathcal{P}_0 est donc vraie.

— **Hérédité** : On suppose que \mathcal{P}_n est vrai pour un certain rang n . (On a donc $u_n \in]0; e - 1[$)

On a

$$\begin{aligned} u_n \in]0; e - 1[&\iff 0 < u_n < e - 1 \\ &\implies f(0) < f(u_n) < f(e - 1) \quad \text{car } f \text{ est croissante sur } [0; +\infty[\\ &\implies 0 < u_{n+1} < e - 1 \end{aligned}$$

La proposition \mathcal{P}_{n+1} est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

— **Conclusion** : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \in]0; e - 1[.}$

(b) On a montré (question 2.b) que $\forall x \in]0; e - 1[, f(x) \leq x$ et (question 3.a) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0; e - 1[$. Donc

$$f(u_n) \leq u_n \implies u_{n+1} \leq u_n.$$

$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$

4. (a) On montre par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > e - 1$:

— On cherche à montrer les propositions $\mathcal{P}_n : \{u_n > e - 1\}$.

— **Initialisation** : La propriété \mathcal{P}_0 s'écrit $u_0 > e - 1$. La propriété \mathcal{P}_0 est donc vraie.

— **Hérédité** : On suppose que \mathcal{P}_n est vrai pour un certain rang n . (On a donc $u_n > e - 1$)

On a

$$\begin{aligned} u_n > e - 1 &\implies f(u_n) > f(e - 1) \quad \text{car } f \text{ est croissante sur } [0; +\infty[\\ &\implies u_{n+1} > e - 1 \end{aligned}$$

La proposition \mathcal{P}_{n+1} est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

— **Conclusion** : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n > e - 1.}$

(b) On a montré (question 2.b) que $\forall x > e - 1, f(x) \geq x$ et (question 4.a) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > e - 1$. Donc

$$f(u_n) \geq u_n \implies u_{n+1} \geq u_n.$$

$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$